گذری بر فرمول های مشتق

قضایای مشتق :

۱) مشتق تابع $f(x)=c$ که در آن c مقداری است ثابت، برابر صفر است.

$$f(x)=c \Rightarrow f'(x)=0$$

۲) مشتق $f(x)=x$ برابر ۱ است.

$$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$$

۳) اگر c مقداری ثابت و تابع $f(x)$ مشتق پذیر باشد آن گاه :

$$(c\,f(x))' = c\,f'(x)$$

۴) اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند آن گاه :

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

یعنی ، مشتق مجموع (تفاضل) دو تابع ، برابر است با مجموع (تفاضل) مشتق های آن دو تابع

توجه ۱: مشتق مجموع n تابع، برابر است با مجموع مشتق‌های آن n تابع.

۵) اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x)$$

به عبارت دیگر، مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برابر است با مشتق اولی در دومی به علاوه مشتق دومی در اولی.

۶) اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)\, f'(x) - g'(x)\, f(x)}{(g(x))^2}$$

$g(x) \neq 0$

به عبارت دیگر، مشتق تقسیم دو تابع برابر است با مشتق صورت در مخرج منهای مشتق مخرج در صورت بر روی مخرج به توان ۲

فرمول های مشتق

① $(c)' = 0$ c عدد ثابت

مثال ① $(4)' = 0$ ② $(-10)' = 0$ ③ $(\sqrt{2})' = 0$

② $(x^n)' = nx^{n-1}$ به عبارتی $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ (در تابع)

مثال:

① $(x^4)' = 4x^{4-1} = 4x^3$

② $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (یادآوری: $\sqrt[n]{x^m} \rightarrow x^{\frac{m}{n}}$)

③ $(\sqrt[3]{x^4})' = (x^{\frac{4}{3}})' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

④ $\left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$ (یادآوری $\frac{1}{x^m} \leftrightarrow x^{-m}$)

۳ $(\sin u)' = u'\cos u$

(به عبارتی $(\sin x)' = \cos x$)

مثال:

۱ $(\sin \underbrace{2x}_{u})' = (2x)'\cos(2x) = 2\cos 2x$

۲ $(\sin 5x^2)' = (5x^2)'\cos(5x^2) = 5(2x)\cos(5x^2) = 10x\cos(5x^2)$

۳ $(\sin\sqrt{x})' = (\sqrt{x})'\cos(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x})$

---

۴ $(\cos u)' = -u'\sin u$

(به عبارتی $(\cos x)' = -\sin x$)

۱ $(\cos 3x)' = -(3x)'\sin 3x = -3\sin 3x$

۲ $(\cos 6x^3)' = -(6x^3)'\sin(6x^3) = -18x^2\sin(6x^3)$

۳ $(\cos\sqrt[3]{x})' = -(\sqrt[3]{x})'\sin(\sqrt[3]{x}) = -(x^{\frac{1}{3}})'\sin(\sqrt[3]{x}) = -(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}})\sin(\sqrt[3]{x})$

۵ $(\tan u)' = u'(1+\tan^{۲} u)$ $\qquad$ ($(\tan x)' = 1+\tan^{۲} x$ به عبارتی)

۱ $(\tan ۳x)' = (۳x)'(1+\tan^{۲} ۳x) = ۳(1+\tan^{۲} ۳x)$

۶ $(\cot u)' = -u'(1+\cot^{۲} u)$ $\qquad$ ($(\cot x)' = -(1+\cot^{۲} x)$ به عبارتی)

۱ $(\cot \sqrt{x})' = -(\sqrt{x})'(1+\cot^{۲}(\sqrt{x})) = -\frac{1}{۲\sqrt{x}}(1+\cot^{۲}(\sqrt{x}))$

۷ $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $\qquad$ ($(\ln x)' = \frac{1}{x}$ به عبارتی)

۱ $(\ln ۴x) = \frac{(۴x)'}{۴x} = \frac{۴}{۴x} = \frac{1}{x}$

۲ $(\ln ۳x^{۲})' = \frac{(۳x^{۲})'}{۳x^{۲}} = \frac{۶x}{۳x^{۲}}$

۸) $(e^u)' = u'e^u$ ($(e^x)' = e^x$ معیاری)

۱) $(e^{\sqrt{x}})' = (\sqrt{x})' e^{\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}$

۲) $(e^{x^4})' = (x^4)' e^{x^4} = 4x^3 e^{x^4}$

۹) $(\text{Arctan}\, u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ ($(\text{Arctan}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ معیاری)

۱) $(\text{Arctan}\, x^2)' = \dfrac{(x^2)'}{1+(x^2)^2} = \dfrac{2x}{1+x^4}$

۲) $(\text{Arctan}(\sqrt{x})') = \dfrac{(\sqrt{x})'}{1+(\sqrt{x})^2} = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

۳) $(\text{Arctan}\, 3x^4)' = \dfrac{(3x^4)'}{1+(3x^4)^2} = \dfrac{12x^3}{1+9x^8}$

⑮ $(\text{ArcSin}\, u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{۱-u^۲}}$ $\qquad |u|<۱ \qquad$ یعنی $(\text{ArcSin}\, x)' = \dfrac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$

① $(\text{ArcSin}\, ۳x)' = \dfrac{(۳x)'}{\sqrt{۱-(۳x)^۲}} = \dfrac{۳}{\sqrt{۱-۹x^۲}}$

② $(\text{ArcSin}\sqrt{x})' = \dfrac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{۱-(\sqrt{x})^۲}} = \dfrac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\sqrt{۱-x}} = \dfrac{۱}{۲\sqrt{x}(\sqrt{۱-x})}$

مثال:

① $((۲x)(۴x^۳))' = (۲x)'(۴x^۳) + (۴x^۳)'(۲x) = ۲(۴x^۳) + ۱۲x^۲(۲x)$

② $((۲x^۲+۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲))' = (۲x^۲+۱)'(\sqrt[۳]{x^۲}+۲) + (\sqrt[۳]{x^۲}+۲)'(۲x^۲+۱)$

$= (۴x+۰)(\sqrt[۳]{x^۲}+۲) + (\frac{۲}{۳}x^{\frac{۲}{۳}-۱})(۲x^۲+۱)$

③ $\left(\dfrac{۲x}{۲x+۱}\right)' = \dfrac{(۲x)'(۲x+۱)-(۲x+۱)'(۲x)}{(۲x+۱)^۲} = \dfrac{۲(۲x+۱)-۲(۲x)}{(۲x+۱)^۲}$

۴ $y' = \left(\dfrac{۱}{۴x-\sqrt{x}}\right)' = \dfrac{(۱)'(۴x-\sqrt{x})-(۴x-\sqrt{x})'(۱)}{(۴x-\sqrt{x})^۲} = \dfrac{۰\times(۴x-\sqrt{x})-\left(۴-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)}{(۴x-\sqrt{x})^۲}$

۵ $\left(\sqrt{x}+\dfrac{۱}{\sqrt{x}}+۳\right)' = \left(\sqrt{x}+(\sqrt{x})^{-۱}+۳\right)' = \left(x^{۱/۲}+x^{-۱/۲}+۳\right)' = \frac{۱}{۲}x^{-۱/۲}-\frac{۱}{۲}x^{-۳/۲}+۰$

۶ $\left(۳(۲x-۱)^۷+۴x\right)' = \left(۳(۲x-۱)^۷\right)'+(۴x)' = \left[(۳)'(۲x-۱)^۷+۷(۲x-۱)'(۲x-۱)^۶(۳)\right]+۴$

$= ۰+۷(۲)(۲x-۱)^۶(۳)+۴$

۷ $(x\sin^۳ ۲x)' = (x)'(\sin^۳ ۲x)+(\sin^۳ ۲x)'x = (۱)\sin^۳ ۲x+(۲x)'(۳)\cos ۲x\sin^۲ ۲x$

$= \sin^۳ ۲x+۶x\cos ۲x\sin^۲ ۲x$

۸ $\left(\mathrm{ArcSin}\,۳x+\mathrm{Arctan}\sqrt{x}+e^{۴x}\right)' = \dfrac{(۳x)'}{\sqrt{۱-(۳x)^۲}}+\dfrac{(\sqrt{x})'}{۱+(\sqrt{x})^۲}+(۴x)'e^{۴x}$

$= \dfrac{۳}{\sqrt{۱-۹x^۲}}+\dfrac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{۱+x}+۴e^{۴x}$

(9) $(x^2e^{\sqrt{x}})' = (x^2)'e^{\sqrt{x}} + (e^{\sqrt{x}})'(x^2) = (x^2)'e^{\sqrt{x}} + (\sqrt{x})'e^{\sqrt{x}}(x^2)$

$= 2xe^{\sqrt{x}} + (\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}})x^2$

(10) $(x\,\mathrm{Arctan}x)' = (x)'\,\mathrm{Arctan}x + (\mathrm{Arctan}x)'x = (1)\,\mathrm{Arctan}x + (\frac{1}{1+x^2})$

(11) $(x^2\ln x)' = (x^2)'\ln x + (\ln x)'(x^2) = 2x\ln x + (\frac{1}{x})(x^2)$

(12) $((5x^2-3x)^2)' = 2(5x^2-3x)'(5x^2-3x)^{2-1} = 2(10x-3x)(5x^2-3x)$

(13) $(\sin^3 2x)' = 3(\sin 2x)'\sin^{3-1}2x = 3(\sin 2x)'\sin^2 2x$

$= 3(2x)'\cos 2x\sin^2 2x = 6\cos 2x\sin^2 2x$

انتگرال

در جلسه گذشته روش‌هایی برای محاسبه‌ی مشتق تابع $f(x)$ ارائه کردیم. اما در حل بسیاری از مسائل لازم است که عکس این روند را انجام دهیم. به عبارت دیگر، در این جلسه فرض بر این است که $f'(x)$ داده شده و منظور تعیین تابع $f(x)$ است. فرآیند تعیین تابع $f(x)$ از $f'(x)$ را ضدمشتق‌گیری یا انتگرال‌گیری می‌نامیم.

تعریف:

تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه یا ضدمشتق یا پادمشتق $f(x)$ در بازه I می‌نامیم. اگر به ازای هر x از I داشته باشیم

$$F'(x) = f(x)$$

مثال: یک تابع اولیه برای تابع $f(x) = 3x^2$ به دست آورید.

$F(x) = x^3$ تابع اولیه $f(x)$

$F'(x) = (x^3)' = 3x^2$

$F_1(x) = x^3 + 1$

$F_1(x) = x^3 - 6$

$F_2(x) = x^3 - \sqrt{5}$

همگی یک تابع اولیه برای $f(x) = 3x^2$ هستند زیرا $F_1'(x) = F_2'(x) = F_3'(x) = 3x^2$

قضیه: اگر $F_1(x)$ و $F_2(x)$ دو تابع اولیه $f(x)$ در بازه I باشند، آنگاه عدد ثابتی مانند c وجود دارد به طوری که

$$F_1(x) - F_2(x) = c$$

نتیجه: پس به این ترتیب نتیجه می‌شود که اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ باشد، آنگاه هر تابع اولیه $f(x)$ به صورت $F(x) + c$ است، که در آن c مقدار ثابتی است.

تعریف: اگر $F(x)$ یک تابع اولیه $f(x)$ در بازه‌ی I باشد، عبارت $F(x) + c$ را که در آن c عدد ثابتی است انتگرال نامعین تابع f می‌نامیم و با $\int f(x)dx$ نشان می‌دهیم. بنابراین:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

نکته: همواره متغیر انتگرال‌گیری را با نوشتن حرف d در جلوی آن مشخص می‌کنیم. برای مثال اگر متغیر انتگرال‌گیری t باشد، برای نمایش انتگرال تابع $f(t)$ می‌نویسیم $\int f(t)dt$. و محاسبه‌ی تابع اولیه f را انتگرال‌گیری از تابع f می‌نامیم.

ویژگی های انتگرال نامعین

فرض کنیم توابع f و g بر بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشند،

الف) اگر c عدد ثابتی باشد داریم:

$$\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

ب)

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

این رابطه را می‌توان برای تعداد متناهی تابع تعمیم داد.

دستورهای انتگرال‌گیری

همان‌طور که دیدیم، هر دستور مشتق‌گیری می‌تواند دستوری برای به دست آوردن انتگرال نامعین نیز باشد. در زیر دستورهای انتگرال‌گیری لازم آورده شده است. درستی این دستورها را با مشتق‌گیری از دو طرف تساوی می‌توان تحقیق کرد.

در تساوی‌های زیر c عدد ثابتی است که به ثابت انتگرال‌گیری موسوم است.

① برای هر عدد $n \neq -1$

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

① $\int x^2 dx = \frac{1}{2+1} x^{2+1} + C$

② $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{3}{2}} + C$

③ $\int 4 \sqrt[2]{x^3}\, dx = 4\int x^{\frac{3}{2}} dx = 4\left(\frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1}\right) dx = 4\left(\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right) + C$

④ $\int (3x^2 - 4x + 2)\, dx = 3\int x^2 dx - 4\int x dx + \int 2 dx = 3\frac{x^{2+1}}{2+1} - 4\frac{x^{1+1}}{1+1} + 2\frac{x^{0+1}}{0+1} + C$

⑤ $\int x^2 \sqrt{x}\, dx = \int x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C$

⑥ $\int \frac{x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4\sqrt{x} - 5}{x^2} dx = \int \frac{x^4}{x^2} dx + 2\int \frac{x^3}{x^2} dx - 3\int \frac{x^2}{x^2} dx + 4\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x^2} - 5\int \frac{dx}{x^2}$

$$\int x^2 dx + 2\int x\, dx - 3\int dx + 4\int \underbrace{x^{\frac{1}{2}-2}}_{x^{\frac{-3}{2}}} dx - 5\int x^{-2} dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\frac{x^{1+1}}{1+1} - 3x + 4\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + 5\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C$$

۷) $\int (x^{۲} - ۳x\sqrt[۵]{x} + \frac{۷}{\sqrt{x}})\,dx = \int (x^{۲} - ۳x \cdot x^{\frac{۱}{۵}} + ۷x^{-\frac{۱}{۲}})\,dx = \int (x^{۲} - ۳x^{\frac{۶}{۵}} + ۷x^{-\frac{۱}{۲}})\,dx$

$$\frac{x^{۲+۱}}{۲+۱} - ۳\frac{x^{\frac{۶}{۵}+۱}}{\frac{۶}{۵}+۱} + ۷\frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱} + c$$

۸) $\int \frac{(x+۲)^{۲}}{\sqrt[۳]{x}}\,dx = \int \frac{x^{۲}+۴x+۴}{\sqrt[۳]{x}}\,dx = \int x^{-\frac{۱}{۳}}(x^{۲}+۴x+۴)\,dx =$

$\int (x^{-\frac{۱}{۳}+۲} + ۴x^{-\frac{۱}{۳}} \cdot x + ۴x^{-\frac{۱}{۳}})\,dx = \int (x^{\frac{۵}{۳}} + ۴x^{\frac{۲}{۳}} + ۴x^{-\frac{۱}{۳}})\,dx =$

$$\frac{x^{\frac{۵}{۳}+۱}}{\frac{۵}{۳}+۱} + ۴\frac{x^{\frac{۲}{۳}+۱}}{\frac{۲}{۳}+۱} + ۴\frac{x^{-\frac{۱}{۳}+۱}}{-\frac{۱}{۳}+۱} + c$$

تمرینات: انتگرال توابع زیر را به دست آورید.

۱) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$

۲) $f(x) = 4x\sqrt{x^2+2}$

۳) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{x}}$

۴) $f(x) = \left(5x\sqrt[3]{x^2}\right)x^4$

۵) $f(x) = 12x^4 - \sqrt{x} + 5$

۶) $f(x) = \dfrac{x^3+3}{x^2}$

۲ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

۱ $\int \frac{۲}{x}\,dx = ۲\int \frac{dx}{x} = ۲\ln|x| + C$

۲ $\int \frac{۱۰}{x}\,dx = ۱۰\int \frac{dx}{x} = ۱۰\ln|x| + C$

۳ $\int \sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cos ax + C$

۱ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

۲ $\int \sin ۲x\,dx = -\frac{1}{۲}\cos ۲x + C$

۳ $\int \sin ۴x\,dx = -\frac{1}{۴}\cos ۴x + C$

۴ $\int \sin(۱۰x)\,dx = -\frac{1}{۱۰}\cos ۱۰x + C$

۴ $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

۱ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

۲ $\int \cos ۳x\,dx = \frac{1}{۳}\sin ۳x + C$

۳ $\int \cos(10x)\,dx = \frac{1}{10}\sin 10x + C$

۴ $\int \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

۵ $\int \sec^2 x\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + C$

۶ $\int \csc^2 x\,dx = \int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x + C$

۷ $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

۸ $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

۹ $\int (\sec x \cdot \tan x)\,dx = \sec x + C$

۱۰ $\int (\csc x \cdot \cot x)\,dx = -\csc x + C$

۱۱) $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \qquad a \neq ۱ , a > ۰$

۱۲) $\int e^x dx = e^x + C \qquad \left(\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \right)$

۱۳) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^۲}} dx = \sin^{-1} x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^۲ - x^۲}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$

۱۴) $\int \frac{dx}{1+x^۲} = \tan^{-1} x + C \qquad \int \frac{dx}{a^۲ + x^۲} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C \qquad a > ۰$

مثال:

$$\int \left(x^۲ \sqrt{x} - \frac{۳}{\sqrt{۴ - x^۲}} \right) dx = \int \left(x^۲ . x^{\frac{1}{۲}} - \frac{۳}{\sqrt{۴ - x^۲}} \right) dx = \int x^{\frac{۵}{۲}} dx - ۳ \int \frac{dx}{\sqrt{۴ - x^۲}}$$

$$= \frac{x^{\frac{۵}{۲}+1}}{\frac{۵}{۲}+1} - ۳ \sin^{-1} \left(\frac{x}{۲} \right) + C = \frac{۲}{۷} x^{\frac{۷}{۲}} - ۳ \sin^{-1} \left(\frac{x}{۲} \right) + C$$

$$\int(۲^x - ۵\sin x + \frac{۴}{۴+x^۲})dx = \int ۲^x dx - ۵\int \sin x\, dx + ۴\int \frac{dx}{\underset{\to ۲^۲}{۴}+x^۲}$$

$$= \frac{۲^x}{Ln۲} - ۵(-\cos x) + ۴\left(\frac{۱}{۲}\tan^{-1}(\frac{x}{۲})\right) + C = \frac{۲^x}{Ln۲} + ۵\cos x + ۲\tan^{-1}(\frac{x}{۲}) + C$$

$$\int \frac{۴}{۳+x^۲}dx = ۴\int\frac{dx}{۳+x^۲} = ۴\int\frac{dx}{(\sqrt{۳})^۲+x^۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{۳}}) + C$$

$$\int(۳\csc^۲ x - e^{۴x} + ۳^x)dx = -۳\cot x - \frac{۱}{۴}e^{۴x} + \frac{۱}{Ln۳}۳^x + C$$

$$\int(۲\tan x - \sec^۲ x)dx = -۲Ln|\cos x| - \tan x + C$$

$$\int(\frac{۲}{x^۲+۴} - \frac{۱}{\sqrt{۴-x^۲}})dx = ۲\left(\frac{۱}{۲}\tan^{-1}(\frac{x}{۲})\right) - \sin^{-1}\frac{x}{۲} + C$$

$$\int(e^{۱۰x} + ۱۰^x)dx = \frac{۱}{۱۰}e^{۱۰x} + \frac{۱}{Ln۱۰}۱۰^x + C$$

۲ $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

۱ $\int \frac{2}{x}\,dx = 2\int \frac{dx}{x} = 2\ln|x| + C$

۲ $\int \frac{10}{x}\,dx = 10\int \frac{dx}{x} = 10\ln|x| + C$

۳ $\int \sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cos ax + C$

۱ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

۲ $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$

۳ $\int \sin 4x\,dx = -\frac{1}{4}\cos 4x + C$

۴ $\int \sin(10x)\,dx = -\frac{1}{10}\cos 10x + C$

۴ $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

۱ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

۲ $\int \cos 3x\,dx = \frac{1}{3}\sin 3x + C$

۳ $\int \cos(10x)\,dx = \frac{1}{10}\sin 10x + C$

۴ $\int \cos(6x)\,dx = \frac{1}{6}\sin 6x + C$

۵ $\int \sec^2 x\,dx = \int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x + C$

۶ $\int \csc^2 x\,dx = \int (1+\cot^2 x)\,dx = -\cot x + C$

۷ $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

۸ $\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

۹ $\int (\sec x \cdot \tan x)\,dx = \sec x + C$

۱۰ $\int (\csc x \cdot \cot x)\,dx = -\csc x + C$

۱۱ $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c \qquad a \neq 1 ,\ a > 0$

۱۲ $\int e^x dx = e^x + c \qquad \left(\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c \right)$

۱۳ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$

۱۴ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c \qquad a > 0$

مثال:

$$\int \left(x^2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \int \left(x^2 . x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}} \right) dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx - 3\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} - 3 \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - 3 \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

$$\int (۲^x - ۵\sin x + \frac{۴}{۴+x^۲})\,dx = \int ۲^x\,dx - ۵\int \sin x\,dx + ۴\int \frac{dx}{۴+x^۲} \quad ۴ \to ۲^۲$$

$$= \frac{۲^x}{\operatorname{Ln} ۲} - ۵(-\cos x) + ۴\left(\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{x}{۲})\right) + C = \frac{۲^x}{\operatorname{Ln} ۲} + ۵\cos x + ۲\tan^{-۱}(\frac{x}{۲}) + C$$

$$\int \frac{۴}{۳+x^۲}\,dx = ۴\int \frac{dx}{۳+x^۲} = ۴\int \frac{dx}{(\sqrt{۳})^۲+x^۲} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}(\tan^{-۱}\frac{x}{\sqrt{۳}}) + C$$

$$\int (۳\csc^۲ x - e^{۴x} + ۳^x)\,dx = -۳\cot x - \frac{۱}{۴}e^{۴x} + \frac{۱}{\operatorname{Ln} ۳}۳^x + C$$

$$\int (۲\tan x - \sec^۲ x)\,dx = -۲\operatorname{Ln}|\cos x| - \tan x + C$$

$$\int (\frac{۲}{x^۲+۴} - \frac{۱}{\sqrt{۴-x^۲}})\,dx = ۲(\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}(\frac{x}{۲})) - \sin^{-۱}\frac{x}{۲} + C$$

$$\int (e^{۱۰x} + ۱۰^x)\,dx = \frac{۱}{۱۰}e^{۱۰x} + \frac{۱}{\operatorname{Ln} ۱۰}۱۰^x + C$$

روش های حل انتگرال

گاهی محاسبه انتگرال به سادگی که در مثال های قبل توضیح داده شد نمی باشد و نمی توان تابع اولیه را به راحتی از روی مشتق حدس زد. بنابراین لازم است که روش هایی را جهت محاسبه بعضی از انتگرال ها به کار ببریم. به این ترتیب روش هایی که برای محاسبه انتگرال وجود دارند را شرح می دهیم.

قاعده ی زنجیری برای انتگرال گیری

فرض می کنیم $g(x)$ تابع مشتق پذیری از x بوده و برد g بازه ی I باشد. همچنین فرض می کنیم تابع f بر I تعریف شده باشد و F یک تابع اولیه f بر I باشد. در این صورت اگر $u=g(x)$ آن گاه

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

مثال: انتگرال نامعین $\int \frac{5x^2}{(1-4x^3)^4}dx$ را محاسبه کنید.

$$\int \frac{5x^2}{(1-4x^3)^4}dx = 5\int \frac{x^2}{(1-4x^3)^4}dx = \frac{5}{-12}\int \frac{\overbrace{-12x^2\,dx}^{du}}{(\underbrace{1-4x^3}_{u})^4} = -\frac{5}{12}\int \frac{du}{u^4} = -\frac{5}{12}\int u^{-4}du$$

$$\left(1-4x^3 = u \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین مشتق}} (1-4x^3)' = u' \rightarrow -12x^2dx = du\right)$$

$$-\frac{5}{12}\left(\frac{u^{-4+1}}{-4+1}\right)+C = \frac{-5}{12}\left(\frac{u^{-3}}{-3}\right)+C = \frac{5}{36}\left(\frac{1}{u^3}\right)+C = \frac{5}{36}\left(\frac{1}{(1-4x^3)^3}\right)+C$$

مثال: انتگرال نامعین $\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2+1}dx$ را محاسبه کنید.

$$\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2+1}dx$$

$$3x^2-6x = u \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} (3x^2-6x)' = u' \rightarrow (6x-6)dx = du$$

پس به این ترتیب u اشتباه فرض شده.

$x^3-3x^2+1=u \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} (x^3-3x^2+1)'=u' \longrightarrow (3x^2-6x)\,dx=du$

$$\int \frac{\overbrace{(3x^2-6x)\,dx}^{du}}{\underbrace{x^3-3x^2+1}_{u}} = \int \frac{du}{u} = \ln|u|+C = \ln|x^3-3x^2+1|+C$$

مثال: انتگرال نامعین $\int\sqrt{2+5t}\,dt$ را محاسبه کنید.

$$\int\sqrt{5t+2}\,dt = \frac{1}{5}\int\sqrt{\underbrace{5t+2}_{u}}\;\overbrace{5\,dt}^{du} = \frac{1}{5}\int\sqrt{u}\,du = \frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{5}\,\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C$$

$$\frac{1}{5}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{15}u^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{15}(5t+2)^{\frac{3}{2}}+C$$

$(5t+2)=u \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} 5\,dt=du \rightarrow$

مثال: انتگرال نامعین $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx$ را به دست آورید.

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = -2\int \frac{\overbrace{(1-\sqrt{x})^2}^{u}}{-2\sqrt{x}}\underbrace{dx}_{du} = -2\int u^2 du = -2\frac{u^3}{3}+C = -2\frac{(1-\sqrt{x})^3}{3}+C$$

$$1-\sqrt{x} = u \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} -\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du$$

مثال: انتگرال نامعین $\int \sin^3 x \cos x dx$ را به دست آورید.

$$\int \underbrace{\sin^3 x}_{u} \overbrace{\cos x\, dx}^{du} = \int u^3 du = \frac{u^4}{4}+C = \frac{(\sin x)^4}{4}+C$$

$$\sin x = u \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \cos x\, dx = du$$

تمرین:

الف) $\int x^{2}\sqrt[5]{1-2x^{3}}\,dx$

ب) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^{2}+2x+3}}\,dx$

پ) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

ت) $\int \cos x\sqrt{2-\sin x}\,dx$

ث) $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$

ج) $\int \cos x\, e^{\sin x}\,dx$

چ) $\int \frac{3\,dx}{e^{x}+e^{-x}}$

ح) $\int \frac{2e^{x}}{1+e^{x}}\,dx$

خ) $\int (x+1)\,2^{x^{2}+2x-1}\,dx$

د) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx \qquad x>0$

ذ) $\int \frac{x^{2}\,dx}{\sqrt{x^{3}+1}}$

ر) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^{2}}}$

ز) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^{2}}}$

ژ) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

س) $\int \frac{2x+3}{x^{2}+3x+4}\,dx$

انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

الف) $\int x^2 \sqrt[5]{1-2x^3}\,dx = \frac{-1}{6}\int \underbrace{-6x^2 \sqrt[5]{\underbrace{1-2x^3}_{u}}\,dx}_{du} = -\frac{1}{6}\int \sqrt[5]{u}\,du = -\frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{5}}\,du$

$1-2x^3=u \rightsquigarrow -6x^2\,dx = du$

$= -\frac{1}{6}\left(\frac{u^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}\right)+C = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{6}{5}}u^{\frac{6}{5}}+C$

$\rightarrow \frac{-5}{36}\sqrt[5]{(1-2x^3)^6}+C$

ب) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{\underbrace{x^2+2x+3}_{u}}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2(x+1)\,dx}^{du}}{\sqrt[3]{\underbrace{x^2+2x+3}_{u}}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}\,du$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right)+C = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right)+C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{u^2}+C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2}+C$

$x^2+2x+3=u \rightsquigarrow (2x+2)\,dx = du \Rightarrow 2(x+1)\,dx = du$

ب) $\int \frac{\sin\overset{u}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = ۲\int \frac{\sin\overset{u}{\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}}\overset{du}{dx} = ۲\int \sin u\,du = -۲\cos u + C$

$= -۲\cos\sqrt{x} + C$

$\sqrt{x} = u \rightsquigarrow \frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx = du$

ت) $\int \cos x\sqrt{\underbrace{۲-\sin x}_{u}}\,dx = -\int -\cos x\sqrt{\underbrace{۲-\sin x}_{u}}\,dx = -\int \sqrt{u}\,du = -\int u^{\frac{۱}{۲}}du$

$= -\frac{u^{\frac{۱}{۲}+۱}}{\frac{۱}{۲}+۱} = -\frac{u^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۲}{۳}\sqrt[۲]{u^۳} = -\frac{۲}{۳}\sqrt[۲]{(۲-\sin x)^۳} + C$ du

$۲-\sin x = u \rightsquigarrow -\cos x\,dx = du$

ث) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\text{۲}+\cos x}\,dx = -\int \frac{\overbrace{-\sin x\,dx}^{du}}{\underbrace{\text{۲}+\cos x}_{u}} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\text{۲}+\cos x| + C$

$\text{۲} + \cos x = u \longrightarrow -\sin x\,dx = du$

ج) $\displaystyle\int \underbrace{\cos x\, e^{\overbrace{\sin x}^{u}}\,dx}_{du} = \int e^{u}\,du = e^{u} + C = e^{\sin x} + C$

$\sin x = u \longrightarrow \cos x\,dx = du$

ج) $\int \frac{2\,dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{2\,dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{2\,dx}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \int \frac{2e^x\,dx}{(e^x)^2+1} = 2\int \frac{\overbrace{e^x\,dx}^{du}}{\underbrace{e^x}_{u}{}^2+1}$

$= 2\int \frac{du}{u^2+1} = 2\operatorname{Arctan} u + C = 2\operatorname{Arctan}(e^x) + C$

$e^x = u \longrightarrow e^x\,dx = du$

ح) $\int \frac{2e^x}{\underbrace{1+e^x}_{u}}\,dx = 2\int \frac{\overbrace{e^x\,dx}^{du}}{\underbrace{1+e^x}_{u}} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|1+e^x| + C$

$1+e^x = u \longrightarrow e^x\,dx = du$

ز) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\underbrace{x^3+1}_{u}}} = \frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{3x^2\,dx}^{du}}{\sqrt{\underbrace{x^3+1}_{u}}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{u} + C$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$$

$$x^3+1=u \rightarrow 3x^2\,dx = du$$

ح) $$\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(\underbrace{2x}_{u})^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2\,dx}^{du}}{\sqrt{3^2-(\underbrace{2x}_{u})^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{3^2-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ArcSin}\frac{u}{3}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ArcSin}\frac{2x}{3}\right) + C = \frac{1}{2}\operatorname{ArcSin}\frac{2x}{3} + C$$

$$2x = u \rightarrow 2\,dx = du$$

ی) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{۶x - x^{۲}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^{۲}-۶x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^{۲}-۶x+۹-۹)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^{۲}-۶x+۹)+۹}}$

$\displaystyle = \int \frac{dx}{\sqrt{۹-(x^{۲}-۶x+۹)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{۹-(x-۳)^{۲}}} = \int \frac{\overset{du}{dx}}{\sqrt{۳^{۲}-(\underset{u}{x-۳})^{۲}}}$

$\displaystyle = \int \frac{du}{\sqrt{۳^{۲}-u^{۲}}} = \operatorname{ArcSin} \frac{u}{۳} + C = \operatorname{ArcSin} \left(\frac{x-۳}{۳}\right) + C$

$x - ۳ = u \longrightarrow dx = du$

ز) $\displaystyle\int \frac{\overbrace{dx}^{du}}{x(\underbrace{1+\ln x}_{u})} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|(1+\ln x)| + C$

$1+\ln x = u \rightarrow \frac{1}{x}\, dx = du$

ح) $\displaystyle\int \frac{\overbrace{(۲x+۳)\,dx}^{du}}{\underbrace{x^{۲}+۳x+۴}_{u}} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^{۲}+۳x+۴| + C$

$x^{۲}+۳x+۴ = u \rightarrow (۲x+۳)\,dx = du$

روش های حل انتگرال

گاهی محاسبه انتگرال به سادگی که در مثال های قبل توضیح داده شد نمی باشد و نمی توان تابع اولیه را به راحتی از روی مشتق حدس زد. بنابراین لازم است که روش هایی را جهت محاسبه بعضی از انتگرال ها به کار ببریم. به این ترتیب روش هایی که برای محاسبه انتگرال وجود دارند را شرح می دهیم.

قاعده ی زنجیری برای انتگرال گیری

فرض می کنیم $g(x)$ تابع مشتق پذیری از x بوده و برد g بازه ی I باشد. همچنین فرض می کنیم تابع f بر I تعریف شده باشد و F یک تابع اولیه f بر I باشد. در این صورت اگر $u = g(x)$ آن گاه

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

مثال: انتگرال نامعین $\int \frac{5x^2}{(1-4x^3)^4}dx$ را محاسبه کنید.

$$\int \frac{5x^2}{(1-4x^3)^4}dx = 5\int \frac{x^2}{(1-4x^3)^4}dx = \frac{5}{-12}\int \frac{\overbrace{-12x^2\,dx}^{du}}{(\underbrace{1-4x^3}_{u})^4} = -\frac{5}{12}\int \frac{du}{u^4} = -\frac{5}{12}\int u^{-4}du$$

$$\left(1-4x^3 = u \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین مشتق}} (1-4x^3)' = u' \rightarrow -12x^2dx = du\right)$$

$$-\frac{5}{12}\left(\frac{u^{-4+1}}{-4+1}\right)+C = \frac{-5}{12}\left(\frac{u^{-3}}{-3}\right)+C = \frac{5}{36}\left(\frac{1}{u^3}\right)+C = \frac{5}{36}\left(\frac{1}{(1-4x^3)^3}\right)+C$$

مثال: انتگرال نامعین $\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2+1}dx$ را محاسبه کنید.

$$\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2+1}dx$$

$$3x^2-6x = u \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} (3x^2-6x)' = u' \rightarrow (6x-6)dx = du$$

پس به این ترتیب u اشتباه فرض شده.

$$x^3 - 3x^2 + 1 = u \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} (x^3 - 3x^2 + 1)' = u' \longrightarrow (3x^2 - 6x)\,dx = du$$

$$\int \frac{\overbrace{(3x^2 - 6x)\,dx}^{du}}{\underbrace{x^3 - 3x^2 + 1}_{u}} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|x^3 - 3x^2 + 1| + c$$

مثال: انتگرال نامعین $\int \sqrt{2 + 5t}\, dt$ را محاسبه کنید.

$$\int \sqrt{5t + 2}\; dt = \frac{1}{5}\int \sqrt{\underbrace{5t + 2}_{u}}\; \overbrace{5\,dt}^{du} = \frac{1}{5}\int \sqrt{u}\, du = \frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{5}\,\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$\frac{1}{5}\,\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{15}\, u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{15}\,(5t + 2)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$(5t + 2) = u \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} 5\,dt = du \rightarrow$$

مثال: انتگرال نامعین $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx$ را به دست آورید.

$$\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}dx = -2\int \frac{\overbrace{(1-\sqrt{x})^2}^{u}}{-2\sqrt{x}}\overbrace{dx}^{du} = -2\int u^2 du = -2\frac{u^3}{3}+C = -2\frac{(1-\sqrt{x})^3}{3}+C$$

$$1-\sqrt{x} = u \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} -\frac{1}{2\sqrt{x}}dx = du$$

مثال: انتگرال نامعین $\int \sin^3 x \cos x dx$ را به دست آورید.

$$\int \underbrace{\sin^3 x}_{u} \overbrace{\cos x \, dx}^{du} = \int u^3 du = \frac{u^4}{4}+C = \frac{(\sin x)^4}{4}+C$$

$$\sin x = u \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق می‌گیریم}} \cos x \, dx = du$$

تمرین:

الف) $\int x^2 \sqrt[5]{1-2x^3}\, dx$

ب) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}\, dx$

پ) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx$

ت) $\int \cos x \sqrt{2-\sin x}\, dx$

ث) $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\, dx$

ج) $\int \cos x\, e^{\sin x}\, dx$

چ) $\int \frac{3\, dx}{e^x+e^{-x}}$

ح) $\int \frac{2e^x}{1+e^x}\, dx$

خ) $\int (x+1)\, 2^{x^2+2x-1}\, dx$

د) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\, dx \qquad x>0$

ذ) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^3+1}}$

ر) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

ز) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}}$

ژ) $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$

س) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\, dx$

انتگرال‌های نامعین زیر را حل کنید.

الف) $\int x^2 \sqrt[5]{1-2x^3}\, dx = \frac{-1}{6}\int \overbrace{-6x^2 \sqrt[5]{\underbrace{1-2x^3}_{u}}\, dx}^{du} = -\frac{1}{6}\int \sqrt[5]{u}\, du = -\frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{5}}\, du$

$1-2x^3 = u \rightsquigarrow -6x^2\, dx = du$

$= -\frac{1}{6}\left(\frac{u^{\frac{1}{5}+1}}{\frac{1}{5}+1}\right) + C = \frac{-\frac{1}{6}}{\frac{6}{5}} u^{\frac{6}{5}} + C$

$\rightarrow \frac{-5}{36} \sqrt[5]{(1-2x^3)^6} + C$

ب) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{\underbrace{x^2+2x+3}_{u}}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2(x+1)\, dx}^{du}}{\sqrt[3]{\underbrace{x^2+2x+3}_{u}}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt[3]{u}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{3}}\, du$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right) + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{u^2} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

$x^2+2x+3 = u \rightsquigarrow (2x+2)\, dx = du \Rightarrow 2(x+1)\, dx = du$

ب) $\int \frac{\sin \overset{u}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = ۲\int \frac{\sin \overset{u}{\sqrt{x}}}{۲\sqrt{x}}\overset{du}{dx} = ۲\int \sin u\,du = -۲\cos u + c$

$= -۲\cos\sqrt{x} + c$

$\sqrt{x} = u \rightsquigarrow \frac{1}{۲\sqrt{x}}dx = du$

ت) $\int \cos x\sqrt{\underbrace{۲-\sin x}_{u}}\,dx = -\int -\cos x\sqrt{\underbrace{۲-\sin x}_{u}}\,dx = -\int \sqrt{u}\,du = -\int u^{\frac{1}{۲}}du$

$= -\frac{u^{\frac{1}{۲}+1}}{\frac{1}{۲}+1} = -\frac{u^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} = -\frac{۲}{۳}\sqrt[۲]{u^{۳}} = -\frac{۲}{۳}\sqrt[۲]{(۲-\sin x)^{۳}} + c$ du

$۲-\sin x = u \rightsquigarrow -\cos x\,dx = du$

ث) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{۲+\cos x}\,dx = -\int \frac{\overbrace{-\sin x\,dx}^{du}}{\underbrace{۲+\cos x}_{u}} = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|۲+\cos x| + C$

$۲+\cos x = u \longrightarrow -\sin x\,dx = du$

ج) $\displaystyle\int \underbrace{\cos x\, dx}_{du}\; e^{\overbrace{\sin x}^{u}} = \int e^{u}\,du = e^{u} + C = e^{\sin x} + C$

$\sin x = u \longrightarrow \cos x\,dx = du$

چ) $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{e^{x}+e^{-x}} = \int \frac{4\,dx}{e^{x}+\frac{1}{e^{x}}} = \int \frac{4\,dx}{\frac{e^{2x}+1}{e^{x}}} = \int \frac{4e^{x}\,dx}{(e^{x})^{2}+1} = 4\int \frac{\overbrace{e^{x}\,dx}^{du}}{(\underbrace{e^{x}}_{u})^{2}+1}$

$\displaystyle = 4\int \frac{du}{u^{2}+1} = 4\operatorname{Arctan} u + C = 4\operatorname{Arctan}(e^{x}) + C$

$e^{x} = u \longrightarrow e^{x}\,dx = du$

ح) $\displaystyle\int \frac{2e^{x}}{\underbrace{1+e^{x}}_{u}}\,dx = 2\int \frac{\overbrace{e^{x}\,dx}^{du}}{\underbrace{1+e^{x}}_{u}} = 2\int \frac{du}{u} = 2\ln|u| + C = 2\ln|1+e^{x}| + C$

$1+e^{x} = u \longrightarrow e^{x}\,dx = du$

خ) $\int (x+1)\, 2^{\overbrace{x^2+2x-1}^{u}}\, dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{2(x+1)\, 2^{\overbrace{x^2+2x-1}^{u}}\, dx}_{du} = \frac{1}{2}\int 2^u\, du$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{2^u}{\ln 2}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\frac{2^{x^2+2x-1}}{\ln 2}\right) + C$

$x^2 + 2x - 1 = u \rightsquigarrow (2x+2)\, dx = du \rightsquigarrow 2(x+1)\, dx = du$

د) $\int \frac{\sin(\overbrace{\ln x}^{u})}{x}\, dx = \int \sin(\overbrace{\ln x}^{u}) \underbrace{\frac{dx}{x}}_{du}$ $\qquad x>0$

$= \int \sin u\, du = -\cos u + C = -\cos(\ln x) + C$

$\ln x = u \rightsquigarrow \frac{1}{x}\, dx = du$

ز) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{\underbrace{x^3+1}_{u}}} = \frac{1}{3}\int \frac{\overbrace{3x^2\,dx}^{du}}{\sqrt{\underbrace{x^3+1}_{u}}} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{3}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3}\sqrt{u} + C$

$x^3 + 1 = u \rightarrow 3x^2\,dx = du$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\sqrt{x^3+1} + C$

ر) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(\underbrace{2x}_{u})^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2\,dx}^{du}}{\sqrt{3^2-(\underbrace{2x}_{u})^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{3^2-u^2}}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ArcSin}\frac{u}{3}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ArcSin}\frac{2x}{3}\right) + C = \frac{1}{2}\operatorname{ArcSin}\frac{2x}{3} + C$

$2x = u \rightarrow 2\,dx = du$

ز) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{۶x - x^{۲}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^{۲} - ۶x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^{۲} - ۶x + ۹ - ۹)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^{۲} - ۶x + ۹) + ۹}}$

$\displaystyle = \int \frac{dx}{\sqrt{۹ - (x^{۲} - ۶x + ۹)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{۹ - (x - ۳)^{۲}}} = \int \frac{\overset{du}{dx}}{\sqrt{۳^{۲} - (\underset{u}{x - ۳})^{۲}}}$

$\displaystyle = \int \frac{du}{\sqrt{۳^{۲} - u^{۲}}} = \text{ArcSin}\,\frac{u}{۳} + C = \text{ArcSin}\,\left(\frac{x - ۳}{۳}\right) + C$

$x - ۳ = u \longrightarrow dx = du$

ز) $\int \frac{dx}{x(\underbrace{1+\ln x}_{u})} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|(1+\ln x)| + C$

$1 + \ln x = u \rightarrow \frac{1}{x}\,dx = du$

ح) $\int \frac{\overbrace{(۲x+۳)\,dx}^{du}}{\underbrace{x^۲+۳x+۴}_{u}} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|x^۲+۳x+۴| + C$

$x^۲ + ۳x + ۴ = u \rightarrow (۲x+۳)\,dx = du$

انتگرال‌گیری از توابع کسری

در ابتدا توابع به فرم $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را به کسرهای ساده تبدیل کرده و سپس به محاسبه انتگرال آن‌ها می‌پردازیم.

قضیه: هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی قابل تجزیه به عوامل درجه اول و عوامل درجه دوم (تجزیه ناپذیر) با ضرایب حقیقی می‌باشد.

محاسبه انتگرال $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ **:** برای محاسبه‌ی انتگرال فوق در حالتی که درجه کسر الحمله $P(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر باشد (در غیر این صورت یعنی در حالتی که درجه کسر الحمله $P(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر نباشد، $P(x)$ را بر $Q(x)$ تقسیم کرده و آن را به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$ که در آن درجه $r(x)$ از درجه $Q(x)$ کمتر است و $q(x)$ خارج قسمت می‌باشد، تبدیل می‌کنیم) تجزیه $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را به کسرهای ساده بررسی می‌کنیم.

حالت اول : $Q(x)$ به عوامل اول تجزیه شود و ریشه‌ها تکراری نباشند یعنی داریم :

$$Q(x) = (x-b_1)(x-b_2) \cdots (x-b_n) \qquad a_i \neq a_j$$

حال برای تجزیه $\frac{P(x)}{Q(x)}$ به کسرهای ساده قرار می‌دهیم :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_1}{x-b_1} + \frac{B_2}{x-b_2} + \cdots + \frac{B_n}{x-b_n}$$

اکنون با توجه به تساوی فوق ضرایب $B_1, B_2, \ldots, B_n$ را تعیین می‌کنیم .

مثال :

$$\int \frac{x+3}{x^3-x}\,dx =$$

$$\frac{x+3}{x^3-x} = \frac{x+3}{x(x^2-1)} = \frac{x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$x+3 = A(x-1)(x+1) + B(x+1)x + Cx(x-1)$$

$$x + ۳ = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

$$x = 0 \longrightarrow ۳ = A(-1)(1) + 0 + 0 \longrightarrow ۳ = -A \longrightarrow \underline{A = -۳}$$

$$x = 1 \longrightarrow 1 + ۳ = 0 + ۲B + 0 \longrightarrow ۴ = ۲B \longrightarrow \underline{B = ۲}$$

$$x = -1 \longrightarrow -1 + ۳ = 0 + 0 + (-C)(-۲) \longrightarrow ۲ = +۲C \longrightarrow \underline{C = +1}$$

$$\int \frac{x + ۳}{x^{۲} - x} dx = \int \frac{-۳}{x} dx + \int \frac{۲}{x-1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx = -۳ \ln|x| + ۲ \ln|x-1| + \ln|x+1| + C$$

حالت دوم: اگر $Q(x)$ به عوامل درجه اول تجزیه شود ولی بعضی از آن‌ها تکراری باشند. در این صورت کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x-b_i)^k} = \frac{B_1}{(x-b_i)} + \frac{B_2}{(x-b_i)^2} + \cdots + \frac{B_k}{(x-b_i)^k}$$

$$\int \frac{dx}{x^3-2x^2} = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x} + \frac{-\frac{1}{2}}{x^2} + \frac{\frac{1}{4}}{x-2}\right) dx = -\frac{1}{4}\ln|x| + \frac{\frac{1}{2}}{x} + \frac{1}{4}\ln|x-2| + C$$

$$\frac{1}{x^3-2x^2} = \frac{1}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}$$

$$1 = Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2$$

$x=0 \longrightarrow 1 = 0 + B(-2) + 0 \longrightarrow B = -\frac{1}{2}$

$x=2 \longrightarrow 1 = 0 + 0 + 4C \longrightarrow C = \frac{1}{4}$

$x=1 \longrightarrow 1 = -A - B + C \longrightarrow 1 = -A + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{4} = -A$

$A = -\frac{1}{4}$

$$\int \frac{dx}{x^۲ - ۴} = \int \frac{\frac{۱}{۴}}{x-۲}\,dx + \int \frac{-\frac{۱}{۴}}{x+۲}\,dx = \frac{۱}{۴}\ln|x-۲| - \frac{۱}{۴}\ln|x+۲| + C$$

$$\frac{۱}{x^۲ - ۴} = \frac{۱}{(x-۲)(x+۲)} = \frac{A}{x-۲} + \frac{B}{x+۲} = \frac{A(x+۲) + B(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$۱ = A(x+۲) + B(x-۲)$$

$$x = ۲ \longrightarrow ۱ = A(۴) + ۰ \longrightarrow A = \frac{۱}{۴}$$

$$x = -۲ \longrightarrow ۱ = ۰ + B(-۴) \longrightarrow B = -\frac{۱}{۴}$$

تمرینات:

الف) $\int \frac{۵x-۲}{x^۲-۴}\,dx = \int \frac{۲}{x-۲}\,dx + \int \frac{۳}{x+۲}\,dx = ۲\ln|x-۲| + ۳\ln|x+۲| + C$

$$\frac{۵x-۲}{x^۲-۴} = \frac{۵x-۲}{(x-۲)(x+۲)} = \frac{A}{x-۲} + \frac{B}{x+۲} = \frac{A(x+۲)+B(x-۲)}{(x-۲)(x+۲)}$$

$$۵x-۲ \equiv A(x+۲) + B(x-۲)$$

$$x=۲ \longrightarrow ۸ = A(۴) + ۰ \longrightarrow ۴A = ۸ \longrightarrow A = ۲$$

$$x=-۲ \longrightarrow -۱۲ = -۴B \longrightarrow B = ۳$$

ب)
$$\int \frac{dx}{x^{۳}+۳x^{۲}} = \int \frac{-\frac{۱}{۹}}{x}\,dx + \int \frac{\frac{۱}{۳}}{x^{۲}}\,dx + \int \frac{\frac{۱}{۹}}{(x+۳)}\,dx = -\frac{۱}{۹}\ln|x| - \frac{۱}{۳}\left(\frac{۱}{x}\right) + \frac{۱}{۹}\ln|x+۳| + C$$

$$\frac{۱}{x^{۳}+۳x^{۲}} = \frac{۱}{x^{۲}(x+۳)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^{۲}} + \frac{C}{x+۳} = \frac{Ax(x+۳)+B(x+۳)+Cx^{۲}}{x^{۲}(x+۳)}$$

$$۱ = Ax(x+۳) + B(x+۳) + Cx^{۲}$$

$$x = ۰ \longrightarrow ۱ = ۳B \longrightarrow B = \frac{۱}{۳}$$

$$x = -۳ \longrightarrow ۱ = ۹C \longrightarrow C = \frac{۱}{۹}$$

$$x = ۱ \longrightarrow ۱ = ۴A + ۴B + C \longrightarrow ۱ = ۴A + \frac{۴}{۳} + \frac{۱}{۹}$$

$$۱ = ۴A + \frac{۱۳}{۹} \longrightarrow ۴A = ۱ - \frac{۱۳}{۹} \longrightarrow ۴A = \frac{-۴}{۹} \longrightarrow A = \frac{-۴}{۹} \div ۴$$

$$A = -\frac{۴}{۹} \times \frac{۱}{۴} = -\frac{۱}{۹}$$

جدول انتگرال‌گیری

فرض کنید $g(x)$ تابعی باشد که n بار مشتق‌پذیر است و مشتق مرتبه‌ی $(n+1)$ آن برابر صفر باشد. $g^{(n+1)}(x) = 0$ و $f(x)$ تابعی باشد که به راحتی انتگرال‌پذیر بوده و بتوان آن را $(n+1)$ دفعه انتگرال‌گیری نمود. حال فرض کنید $F_1(x)$ و $F_2(x)$ و ... و $F_{n+1}(x)$ به ترتیب ضد مشتق (انتگرال) مرتبه اول و دوم و ... و $n+1$ ام تابع $f(x)$ باشند. در این صورت $\int g(x)f(x)dx$ را می‌توان با جدول زیر محاسبه نمود.

$g(x)$		$f(x)$
	$+$	
$g^{(1)}(x)$		$F_1(x)$
	$-$	
$g^{(2)}(x)$		$F_2(x)$
	$+$	
$\vdots$		
$g^{(n)}(x)$		$F_n(x)$
	$(-1)^n$	
0		$F_{(n+1)}(x)$

$$\int g(x)f(x)dx = g(x)F_1(x) - g^{(1)}(x)F_2(x) + \cdots + (-1)^n g^{(n)}(x)F_{n+1}(x)$$

حل:

① $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c$

x^2	e^x
$2x$	e^x
2	e^x
0	e^x

$+ \quad - \quad +$

② $\int 3x^2 \sin x\, dx = 3\int x^2 \sin x\, dx$

$= 3(-x^2 \sin x + 2x \sin x + 2\cos x) + c$

x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

$+ \quad - \quad +$

③ $\int x^3 e^{3x} dx = \frac{1}{3}x^3 e^{3x} - \frac{3}{9}x^2 e^{3x} + \frac{6x}{27} e^{3x} - \frac{6}{81} e^{3x} + c$

x^3	e^{3x}
$3x^2$	$\frac{1}{3}e^{3x}$
$6x$	$\frac{1}{9}e^{3x}$
6	$\frac{1}{27}e^{3x}$
0	$\frac{1}{81}e^{3x}$

$+ \quad - \quad + \quad -$

(۴) $\int x^2 \cos 3x \, dx = \frac{1}{3} x^2 \sin 3x - \frac{2}{9} x \cos 3x - \frac{2}{27} \sin 3x + C$

x^2	$\cos 3x$
$2x$	$+\frac{1}{3}\sin 3x$
2	$-\frac{1}{9}\cos 3x$
0	$-\frac{1}{27}\sin 3x$

جدول انتگرال گیری یک خطی

در این روش نمی توان از جدول انتگرال گیری معمولی استفاده نمود زیرا امکان دارد یکی از توابع به راحتی انتگرال پذیر نبوده یا مشتق گیری به صفر نرسد. پس از جدول انتگرال گیری یک خطی برای حل انتگرال استفاده می کنیم.

$g(x)$	$f(x)$
$g'(x)$	$F_1(x)$
$\int$	

$$\int g(x) f(x) \, dx = g(x) F_1(x) - \int g'(x) F_1(x) \, dx$$

مثال،

① $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x} dx$

$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$

$$\begin{array}{c|c} \ln x & x \\ \hline \frac{1}{x} & \frac{x^2}{2} \end{array} \quad + \quad \int -$$

② $\int \operatorname{Arctan} x \, dx = x \operatorname{Arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{Arctan} x - \left(\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) + C$

$$\begin{array}{c|c} \operatorname{Arctan} x & 1 \\ \hline \frac{1}{1+x^2} & x \end{array} \quad + \quad \int -$$

$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{\overbrace{2x \, dx}^{du}}{\underbrace{1+x^2}_{u}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}(\ln|u|) + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

$1 + x^2 = u \longrightarrow 2x\,dx = du$

۳) $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$

$\ln x$	1
$\frac{1}{x}$	x
$\int$	

جدول انتگرال‌گیری دوخطی

در حل برخی از انتگرال‌ها مشاهده می‌شود که پس از انجام عملیات مضربی از انتگرال اولیه در مسئله مشاهده می‌شود. در این موارد می‌توان از جدول انتگرال‌گیری دوخطی استفاده نمود.

$g(x)$	$f(x)$
$g'(x)$	$F_1(x)$
$g''(x)$	$F_2(x)$
$\int$	

$$\int g(x)f(x)\,dx = g(x)F_1(x) - g'(x)F_2(x) + \int g''(x)F_2(x)\,dx$$

$$\underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{A} = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{A}$$

$$\begin{array}{c|c} e^x & +\cos x \\ \hline e^x & \sin x \\ e^x & -\ -\cos x \\ \hline \int & + \end{array}$$

$$A = e^x \sin x + e^x \cos x - A \rightsquigarrow A + A = e^x \sin x + e^x \cos x \rightsquigarrow 2A = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$A = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x + e^x \cos x\right) + C$$

$$\underbrace{\int e^{2x} \sin 3x\,dx}_{A} = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x - \frac{4}{9} \underbrace{\int e^{2x} \sin 3x\,dx}_{A}$$

$$\begin{array}{c|c} e^{2x} & +\sin 3x \\ \hline 2e^{2x} & -\frac{1}{3}\cos 3x \\ 4e^{2x} & -\frac{1}{9}\sin 3x \\ \hline \int & + \end{array}$$

$$A + \frac{4}{9} A = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x \rightsquigarrow \frac{13}{9} A = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x$$

$$A = \frac{9}{13}\left(-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \sin 3x\right) + C$$

انتگرال معین

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنید تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد، اگر $F'(x)=f(x)$، آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

تذکر: توجه داشته باشید که c ثابت انتگرال‌گیری در مقدار انتگرال معین تاثیری ندارد. زیرا اگر به جای $F(x)$، تابع $F(x)+C$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت،

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)+C\Big]\Big|_{x=a}^{x=b} = \big[F(b)+C\big]-\big[F(a)+C\big] = F(b)-F(a)$$

بنابراین مقدار $\int_a^b f(x)\,dx$ بستگی به انتخاب تابع اولیه ندارد.

انتگرال معین زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^1 (3x^2-4x+2)\,dx = \frac{3x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+2x\,\Big|_0^1 = x^3-2x^2+2x\,\Big|_0^1 =$$

$$(1-2+2)-(0-0+0)=1$$

$$\int_0^2 (4x+1)^{\frac{1}{2}}dx \rightarrow \frac{1}{4}\int \underbrace{(4x+1)}_{u}^{\frac{1}{2}}\underbrace{4dx}_{du} = \frac{1}{4}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{6}\sqrt[2]{(4x+1)^3}\,\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{6}(3^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$$

$$4x+1=u \rightarrow 4dx=du$$

خواص انتگرال معین

فرض می‌کنیم توابع f و g در بازه $[a,b]$ پیوسته باشند، آنگاه

الف) $\int_a^b k f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

ب) $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

پ) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

ت) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ث) برای هر $c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

مثال: انتگرال معین تابع $f(x) = \begin{cases} 5x^2+1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x+4 & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ را در بازه $[0,3]$ محاسبه کنید.

تابع f در بازه $[0,3]$ پیوسته است، زیرا

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 6$$

پس f در این بازه انتگرال پذیر است بنابراین داریم

$$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx = \int_0^1 (5x^2+1)\,dx + \int_1^3 (2x+4)\,dx$$

$$= \frac{5x^3}{3} + x \Big|_0^1 + \left(\frac{2x^2}{2} + 4x\right)\Big|_1^3 = \left[\left(\frac{5}{3}+1\right) - 0\right] + \left[(9+12) - (1+4)\right]$$

$$= \frac{56}{3}$$

مثال: انتگرال معین $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx$ را محاسبه کنید.

مشتق ↓	انتگرال ↓
x	$\sec^2 x$
1	$+\ \tan x$
0	$-\ -\ln(\cos x)$

$$\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x + \ln|\cos x| + C$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sec^2 x\,dx = x\tan x + \ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\left(\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{4} + \ln\left|\cos\frac{\pi}{4}\right|\right) - \left(0\tan 0 + \ln|\cos 0|\right) = \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تمرین:

انتگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_2^5 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$

ب) $\int_0^2 e^{-\frac{3}{2}x}\,dx$

$$* \int_{۱}^{۴} \frac{dx}{۳x+۱} \rightarrow \frac{۱}{۳}\int \frac{\overbrace{۳dx}^{du}}{\underbrace{۳x+۱}_{u}} = \frac{۱}{۳}\int \frac{du}{u} = \frac{۱}{۳}\ln|u| = \frac{۱}{۳}\ln|۳x+۱|$$

$$\rightarrow \frac{۱}{۳}\ln|۱۳| - \frac{۱}{۳}\ln|۴|$$

$$۳x+۱=u \xrightarrow{\text{تغییر}} ۳dx = du$$

$$* \int_{-۲}^{۲} \frac{dx}{\sqrt{۴-x^۲}} = \int_{-۲}^{۲} \frac{dx}{\sqrt{۲^۲-x^۲}} = \text{ArcSin}\,\frac{x}{۲}\Big|_{-۲}^{۲} = (\text{ArcSin}\,۱) - (\text{ArcSin}(-۱))$$

$$\sin\frac{۳\pi}{۲} = -۱ = \sin(-\pi/۲)$$

$$\sin\frac{\pi}{۲} = ۱$$

پ) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx$

ت) $\int_{1}^{4} \frac{dx}{3x+1}$

ث) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

ج) $\int_{0}^{\frac{\pi}{8}} \sec(2x)\tan(2x)\, dx$

چ) $\int_{1}^{4} x^{\frac{3}{2}} \ln(3x)\, dx$

تمرین: انتگرال های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

ب) $\int_{0}^{2} \frac{x \ln(x^2+1)}{x^2+1} dx$

پ) $\int_{-5}^{1} |x+3|\, dx$

ت) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

$$*\int_{۲}^{۵} (x^{۲} + \frac{۱}{x^{۲}})dx = \frac{x^{۳}}{۳} - \frac{۱}{x} \Big|_{۲}^{۵} = (\frac{۵^{۳}}{۳} - \frac{۱}{۵}) - (\frac{۲^{۳}}{۳} - \frac{۱}{۲})$$

$$*\int_{۰}^{۲} e^{-\frac{۳}{۲}x} dx = \frac{۱}{-\frac{۳}{۲}} e^{-\frac{۳}{۲}x} \Big|_{۰}^{۲} = -\frac{۲}{۳} e^{-\frac{۳}{۲}(۲)} - (-\frac{۲}{۳} e^{-\frac{۳}{۲}(۰)}) = -\frac{۲}{۳} e^{-۳} + \frac{۲}{۳}$$

$$*\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \sin^{۲} x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} \frac{۱-\cos ۲x}{۲} dx = \frac{۱}{۲}\int_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} (۱-\cos ۲x) dx$$

$$= \frac{۱}{۲}(x - \frac{۱}{۲}\sin ۲x) \Big|_{-\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۴}} = \frac{۱}{۲}\Big[(\frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}\sin \frac{۲\pi}{۴}) - (-\frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}\sin(-\frac{۲\pi}{۴}))\Big]$$

$$= \frac{۱}{۲}\Big[\frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲} + \frac{\pi}{۴} + \frac{۱}{۲}(-۱)\Big] = \frac{۱}{۲}\Big[\frac{۲\pi}{۴} - ۱\Big] = \frac{\pi}{۴} - \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^{۲} x \rightarrow ۲\sin^{۲} x = ۱ - \cos ۲x \rightarrow \sin^{۲} x = \frac{۱-\cos ۲x}{۲}$$

$$\sin \frac{\pi}{۲} = ۱ \qquad \sin(-\frac{\pi}{۲}) = -\sin\frac{\pi}{۲} = -۱$$